Leçon 203 : Utilisation de la notion de compacité.

Développements :

Théorème d'Ascoli, Ellipsoïde de John-Loewner.

Bibliographie :

Gourdon, Pommellet, Nourdin, Queffelec, Rombaldi analyse réelle, Hirsch-Lacombe, Bernis.

Rapport du jury 2017 :

Il est important de ne pas concentrer la leçon sur la compacité en général (confusion entre utilisation de la notion compacité et notion de compacité), et de se concentrer en priorité sur le cadre métrique. Néanmoins, on attend des candidats d'avoir une vision synthétique de la compacité. Des exemples d'applications comme le théorème de Heine et le théorème de Rolle doivent y figurer et leur démonstration être connue. Par ailleurs, le candidat doit savoir quand la boule unité d'un espace vectoriel normé est compacte. Des exemples significatifs d'utilisation comme le théorème de Stone-Weierstrass (version qui utilise pertinemment la compacité), des théorèmes de point fixe, voire l'étude qualitative d'équations différentielles, sont tout-à fait envisageables. Le rôle de la compacité pour des problèmes d'existence d'extrema mériterait d'être davantage étudié. On peut penser comme application à la diagonalisation des matrices symétriques à coefficients réels. Pour aller plus loin, les familles normales de fonctions holomorphes fournissent des exemples fondamentaux d'utilisation de la compacité. Les opérateurs auto-adjoints compacts sur l'espace de Hilbert relèvent également de cette leçon, et on pourra développer l'analyse de leurs propriétés spectrales.

Rapport du jury 2016 :

Il est important de ne pas concentrer la leçon sur la compacité générale (confusion entre utilisation de la notion compacité et notion de compacité). Néanmoins, on attend des candidats d'avoir une vision synthétique de la compacité. Des exemples d'applications comme le théorème de Heine et le théorème de Rolle doivent y figurer et leur démonstration être connue. Par ailleurs, le candidat doit savoir quand la boule unité d'un espace vectoriel normé est compacte. Des exemples significatifs d'utilisation comme le théorème de Stone-Weierstrass, des théorèmes de point fixe, voire l'étude qualitative d'équations différentielles, sont tout-à fait envisageables. Le rôle de la compacité pour des problèmes d'existence d'extrema mériterait d'être davantage étudié. On peut penser comme application à la diagonalisation des matrices symétriques à coefficients réels. Pour aller plus loin, les familles normales de fonctions holomorphes fournissent des exemples fondamentaux d'utilisation de la compacité. Les opérateurs auto-adjoints compacts sur l'espace de Hilbert relèvent également de cette leçon, et on pourra développer l'analyse de leurs propriétés spectrales.

Remarque 1. *Cadre : (X, d) est un espace métrique.*

1 Premières conséquences de la compacité

1.1 Propriété de Borel-Lebesgue

Définition 2 (Gourdon p27)**.** *[Pommellet p51] Compact avec les sous-recouvrements finis.*

Application 3 (Pommellet p51)**.** *Les fonctions réglées sont limite uniforme d'une suite de fonctions en escalier.*

Proposition 4 (Pommellet p53)**.** *[Gourdon p28] Dans un compact, toute suite décroissante de fermés non vides a une intersection non vide.*

Proposition 5 (Nourdin p1)**.** *[FGN anal 2 p357] Théorème de Dini.*

Application 6 (Nourdin p1)**.** *Une application facile ou voir le Queffelec p86, théorème de Mercier.*

1.2 Propriété de Bolzano-Weierstrass (caractérisation séquentielle)

Remarque 7. *Définition équivalente dans un métrique, plus manipulable*

Proposition 8 (Gourdon p28)**.** *Théorème de Bolzano-Weierstrass.*
Un espace métrique est compact si et seulement si de toute suite de points, on peut extraire une sous-suite convergente.

Application 9 (Pommellet)**.** *Un sous-ensemble infini d'un compact possède un point d'accumulation.*

Application 10 (Pommellet p55)**.** *[Gourdon p30] Dans un compact, une suite converge si, et seulement si, elle a une unique valeur d'adhérence.*

Remarque 11 (Nourdin p4)**.** *L'intérêt est que l'on peut raisonner en supposant que la suite converge et chercher une relation qui détermine la limite de manière unique.*

Remarque 12. *Toute suite dans un compact a une valeur d'adhérence et si elle est unique alors la suite converge.*

Exemple 13. $\sin(n)$ *: $Ad(\{\sin(n), n \in \mathbb{N}\} = [-1, 1]$ donc non convergente.*

Application 14 (Nourdin p4)**.** *Soit (x_n) une suite de nombres réels. (e^{itx_n}) converge pour tout $t \in \mathbb{R}$ si et seulement si (x_n) converge.*

Application 15 (Nourdin p4). *[Bernis] Soit (X_n) une suite de va gaussiennes et X une va. Si X_n converge en loi vers X alors X est gaussienne. (application de l'application précédente).*

Proposition 16 (Pommellet p55). *Une application à valeurs dans un compact est continue si, et seulement si, son graphe est fermé.*

2 Propriétés des fonctions continues sur un compact

2.1 Image directe d'un compact

Proposition 17 (Gourdon p31). *L'image d'un compact par une application continue est compacte.*

Contre exemple 18. $\sin^{-1}([-1,1]) = \mathbb{R}$.

Application 19 (Gourdon p31). *[Pommellet p55] Soit f une bijection continue d'un compact sur un espace métrique. Alors f est un homéomorphisme.*

Application 20 (Queffelec ?). $[0,1]$ *et* $\mathbb{R}$ *ne sont pas homéomorphes.*

Application 21. $SO_3(\mathbb{R})$ *est simple.*

Proposition 22. *L'image de tout compact est compacte si et seulement si f est coercive.*

Application 23 (Bernis). *Théorème de Hadamard Lévy.*

2.2 Existence d'un extremum

Corollaire 24 (Gourdon p31). *Une application continue sur un compact à valeurs dans $\mathbb{R}$ est bornée et atteint ses bornes.*

Application 25 (Romb). *[Gourdon p71] Théorème de Rolle.*

Application 26 (Pommellet p56). *Compacité et distance atteinte.*

Application 27 (Nourdin p4). *Soit F un fermé et K un compact. Si F et K sont disjoints alors $d(F,K) > 0$.*

Application 28 (Bernis). *Ellipsoïde de John Loewner.*

Définition 29. *On l'appelle distance de la convergence uniforme.*

Proposition 30 (Pommellet p295). *Une application continue et coercive est minorée et atteint son minimum.*

Exemple 31. *Soit $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^n$, $f : R^n \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{2} < Ax, x > - < b, x >$. f possède un unique minimum sur $\mathbb{R}^n$. (L'unicité s'obtient car elle est strictement convexe.*

Proposition 32 (Gourdon). *Soient F fermé, K compact. Il existe $x \in K$ et $y \in F$ tels que $d(x, y = d(F,K)$.*

Proposition 33. *Théorème de Banach-Alaoglu et optimisation.*

2.3 Théorèmes de point fixe

Proposition 34 (Gourdon p34). *[Bernis] $f : E \to E$, E compact et $d(f(x), f(y)) < d(x,y)$. Alors f admet un unique point fixe.*

Contre exemple 35 (Gourdon p34). *Faux si E est seulement complet.*

Application 36 (Gourdon p52). *[Bernis] $f : K \to K$, K compact convexe (ou étoilé) tel que $||f(x) - f(y)|| \leq ||x - y||$. Alors f admet au moins un point fixe.*

Contre exemple 37 (Bernis). *Pas unicité du point fixe : l'identité sur le disque unité fermé de $\mathbb{R}^2$ a une infinité de points fixes.*

Contre exemple 38 (Bernis). *Compact étoilé : La rotation d'angle π de centre $(0,0)$ sur une couronne fermée de $\mathbb{R}^2$ de même centre n'a aucun point fixe.*

2.4 Théorème de Heine et applications

Théorème 39 (Pommellet p57). *[Gourdon p31] Théorème de Heine.*

Application 40. *L'espace des fonctions en escalier est dense dans l'espace des fonctions continues par morceaux sur un segment pour la convergence uniforme.*

Application 41 (Pommellet p62). *Une fonction continue d'un segment de $\mathbb{R}$ dans un evn est limite uniforme d'une suite de fonctions affines par morceaux.*

Application 42 (Pommellet p61). *Toute fonction continue périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ est uniformément continue.*

Application 43 (Pommellet p61). *Toute fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ admettant des limites finies en $+\infty$ et $-\infty$ est uniformément continue.*

Application 44 (Nourdin p6). *Théorème de Weierstrass par les probas.*

Application 45 (Nourdin p3). *[Queffelec][FGN anal 2 p156] Théorème de Dini. (second).*

Application 46 (Nourdin o3). *Glivenko Cantelli.*

Si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in C([0,1], \mathbb{R})$ suite de fonctions croissantes qui converge simplement, alors la convergence est uniforme.

3 Compacité dans les espaces vectoriels normés de dimension finie

Remarque 47. *Utilisation de la compacité pour démontrer des propriétés théoriques.*

Proposition 48 (Gourdon p30). *Les parties compactes de $\mathbb{R}^n$ sont exactement les fermés bornés.*

Lemme 49. *On munit R^n de la norme uniforme $||.||_\infty$. Alors la sphère $S = \{x \in \mathbb{R}^n, ||x||_\infty = 1\}$ est compacte.*

Théorème 50 (Gourdon p50)**.** *Toutes les normes sont équivalentes sur un e.v.n de dimension finie.*

Application 51 (Gourdon p50)**.** *Toutes les applications linéaires sur un evn de dimension finie sont continues.*

Application 52 (Gourdon p50)**.** *Les parties compactes d'un evn de dimension finie sont les parties fermées bornées.*

Exemple 53. *$O_n(\mathbb{R})$ est compact dans $M_n(\mathbb{R})$.*

Application 54. *La décomposition polaire est un homéomorphisme.*

Application 55. *Si E est un evn de dimension finie, toute suite bornée admet une valeur d'adhérence.*

Théorème 56 (Gourdon p56)**.** *Théorème de Riesz.*

Un evn E est de dimension finie si et seulement si sa boule unité est compacte.

4 Espace des fonctions continues sur un compact

4.1 Complétude

Proposition 57. *L'espace $C(K, E)$ muni de la norme uniforme est complet lorsque E est complet.*

Contre exemple 58. *$C([0, 1], \mathbb{R})$ muni de la norme L^1 ou de la norme L^2 est non complet.*

Application 59. *Théorème de Cauchy-Lipschitz.*

4.2 Approximation des fonctions continues sur un compact

Définition 60. *Algèbre séparante.*

Théorème 61 (Hirsch)**.** *[St Raymond p87] Théorème de Stone-Weierstrass (version réelle).*

Application 62. *L'ensemble des fonctions polynomiales à d variables de X sur $\mathbb{R}$ est dense. Dans le cas $d = 1$, cela correspond au théorème de Weierstrass.*

Remarque 63. *On connait même l'expression des polynomes : Berstein.*

Application 64. *Les fonctions lipschitziennes sont denses dans $C([0, 1], \mathbb{R})$.*

Corollaire 65. *Si X est un compact, alors $C(X, R)$ est séparable (la famille des x^n forme une partie dense et dénombrable).*

Théorème 66. *Théorème de Stone-Weierstass (version complexe).*

Application 67. *L'ensemble engendré par les $(z!z^p)$ est dense dans C(cercle unité,C).*

Corollaire 68. *Densité des polynômes trigonométriques.*

Remarque 69. *On connait en fait une expression exacte : noyau de Féjer.*

4.3 Compacité dans l'espace des fonctions continues

Théorème 70 (Bernis)**.** *Théorème d'Ascoli.*

Application 71. *Théorème de Cauchy Peano.*

Contre exemple 72. *Bosse glissante.*

Application 73. *Soit $K \in C([0, 1]^2, \mathbb{R})$, soit $E = C([0, 1], \mathbb{R})$, soit $T : E \to E$ défini par $T(f)(x) = \int_0^1 K(x, y)f(y)dy$. Alors $T(B_E(0, 1))$ est relativement compacte.*

Application 74 (Bernis)**.** *Tout sev fermé de C^0 inclus dans C^1 est de dimension finie.*